

De ijsbergmetafoor

Frans Moerlands en Hein van der Straaten

Een vergrootglas op het leerproces

In het project 'Speciaal rekenen' dat door het Freudenthal Instituut (in samenwerking met CED en KPC Groep) sinds 2001 in gang is gezet, werd de metafoor van het topje van de ijsberg¹⁾ geïntroduceerd. In het PARWO-project waarin het ontwerp bureau Edumat en de Stichting Speciaal Onderwijs Tilburg (SSOT) samenwerken, is de ijsbergmetafoor een belangrijke basis onder het hele project.

Dat juist vanuit het speciaal (basis)onderwijs de behoefte is ontstaan aan een grondige bezinning op het rekenonderwijs aan deze doelgroepen is niet zo verwonderlijk. De problemen die zich bij het onderwijs aan deze kinderen voordoen zijn talrijk en zeer divers van aard. Het volgen en ondersteunen van de leerprocessen van deze kinderen legt een vergrootglas op pedagogische en didactische vakbekwaamheid. Het zoeken naar een betere ondersteuning van de manier waarop deze kinderen leren rekenen blijkt nieuwe vakdidactische inzichten te genereren.

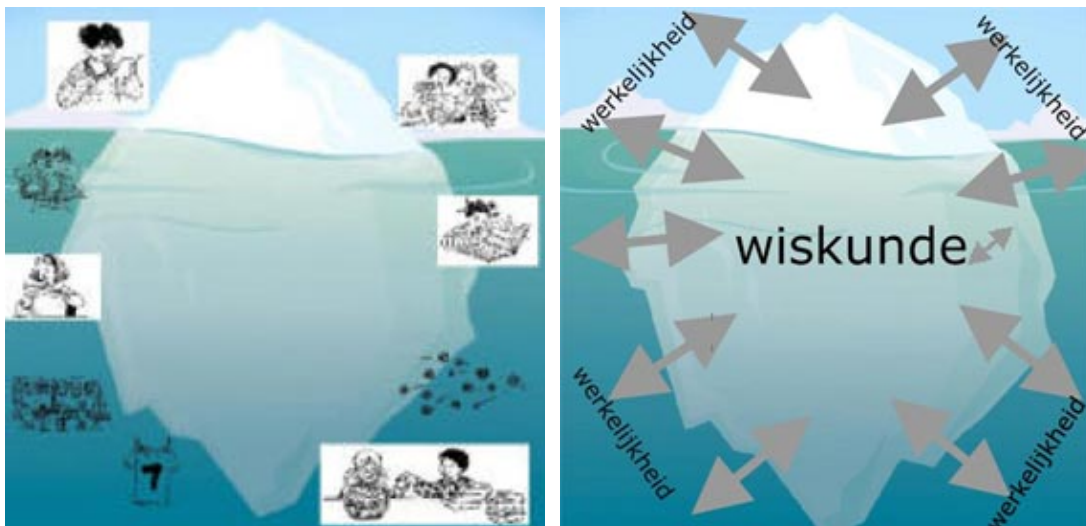
Voor veel leerkrachten in het SO en het SBO bleek de kennismaking met de uitgangspunten en verworvenheden van de realistische rekendidactiek een uitstekende basis om de kwaliteit van het rekenonderwijs te verbeteren.

Maar met het zondermeer overnemen van realistische methodes uit het reguliere basisonderwijs zijn leerkrachten in het S(B)O niet onmiddellijk geholpen.

De punten waarop verbeteringen zichtbaar zijn, zijn duidelijk. Zo zorgt het gebruik maken van contexten voor een betere aansluiting bij de belevingswereld van de kinderen en voor een grotere praktijkgerichtheid. Redzaamheid in de samenleving kan daarmee beter worden bereikt. Gebruik maken van schema's en modellen om het abstractieproces van concrete contexten naar formele sommen te ondersteunen lijkt als idee een prima basis voor de didactiek aan kinderen bij wie het abstractieproces niet vanzelf verloopt. Maar juist op dit punt blijken de rekenmethodes uit het basisonderwijs niet genoeg mogelijkheden te bieden. Voor veel kinderen – ook in het reguliere basisonderwijs – gaat het abstractieproces te snel. Er wordt te snel overgeschakeld op het maken van kale sommen. Als kinderen niet snappen wat ze doen en waarom ze dat doen wordt het een frustrerende bezigheid, voor het kind zelf, maar ook voor de leerkracht.

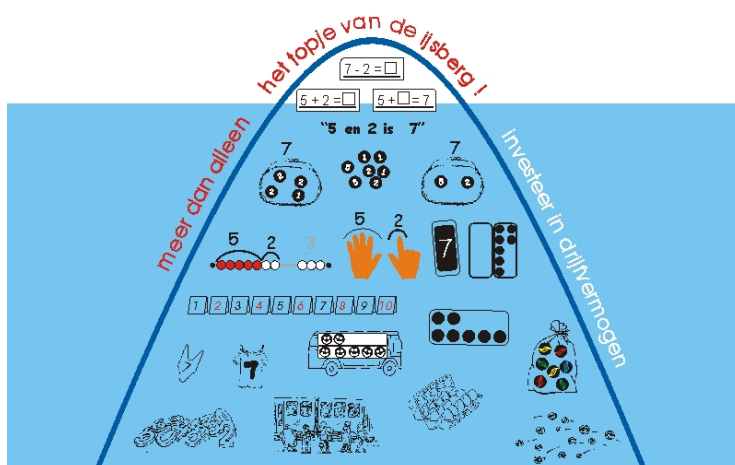
Investeren in drijfvermogen

De ijsbergmetafoor maakt duidelijk dat het maken van sommen slechts het topje van



de ijsberg vormt. De wiskunde (het ijs) is meer dan wat er boven het water zichtbaar is. Het water, maar ook de lucht die de ijsberg omringt, symboliseert de werkelijkheid. Dat betekent, dat de werkelijkheid op elk niveau betekenis verleent aan de wiskunde en omgekeerd, dat de wiskunde op elk niveau toepassing kan vinden in de werkelijkheid. Het ijs representeert in deze metafoor ook echt de uitgekristalliseerde werkelijkheid. In de wiskunde gaat het om het symboliseren, het omvormen, het (her)structureren en het abstraheren van de concrete werkelijkheid.

In feite weerspiegelt dit beeld het idee van wiskundige wereldverkenning. Waar en hoe kom je wiskunde tegen in het dagelijkse leven, wat betekent het daar en hoe kun je er in je dagelijkse leven met behulp van de wiskunde meer greep op krijgen? Met wiskundige wereldverkenning mikken we op ontwikkeling van gecijferdheid ²⁾ bij kinderen. Voor het speciaal onderwijs krijgt het begrip redzaamheid daarmee een concrete invulling en betekenis. Vanuit de realistische rekendidactiek zou het gebruik van contexten de verbinding tussen werkelijkheid en wiskunde moeten kunnen leggen. Als kinderen hun eigen werkelijkheid herkennen in de context kan informele kennis hiermee bewust worden gemaakt. Zo maken kinderen kennis met getallen en bewerkingen. Op alle aspecten van het rekenonderwijs zijn zulke verkenningen van verschijningsvormen en functionaliteit van getallen en bewerkingen een noodzakelijk vertrekpunt. Vandaar dat dit in verschillende ijsbergen kan worden weergegeven.



De ijsberg voor de verkenning van de getalgebied tot 10 laat zien, dat er al een heel proces achter de rug is, voordat kinderen toe komen aan formele sommen als $5+2=7$. Toch wordt over het algemeen in het onderwijs veel tijd en energie gestoken in het topje van de ijsberg (de formele bewerkingen), terwijl de niveaus daaronder (het

drijfvermogen) veel minder aandacht krijgen, ook in realistische rekenmethodes. De tijd die aan het formele rekenen wordt besteed richt zich bovendien vaak – en met name bij zwakke rekenaars – op het herhalen, oefenen of remediëren en veel minder op de onderliggende vaardigheden die betekenis en structuur van het formele rekenen onderbouwen. Daarmee pleiten we voor het investeren in drijfvermogen.

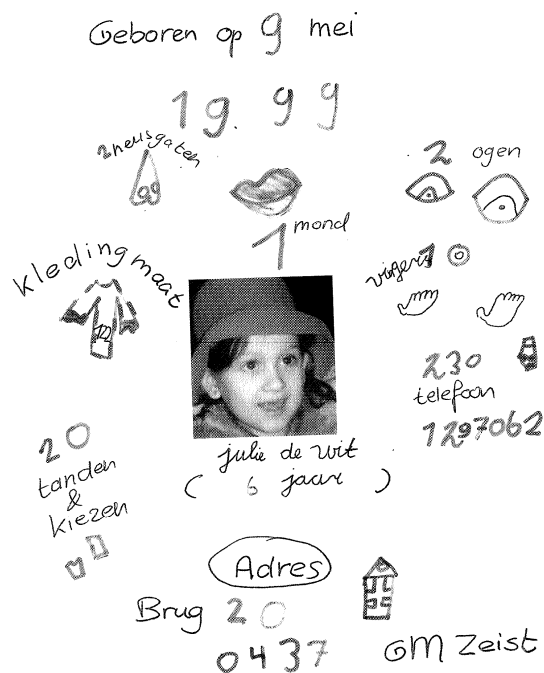
Gelaagdheid in de ijsbergen

1. Verkenning van uiterlijk en functionaliteit

In het meest basale niveau van de ijsberg krijgen kinderen gelegenheid kennis te maken met het uiterlijk, de verschijningsvormen van getallen en bewerkingen en daaraan gekoppeld met de functionaliteit ervan. Kinderen krijgen gelegenheid dat in concrete, betekenisvolle situaties te onderzoeken. Cijfers kunnen er bijvoorbeeld



heel verschillend uit zien (zie afbeelding 4) en kinderen moeten ze kunnen onderscheiden van letters en andere tekens die we in onze schrijftaal gebruiken. Kinderen zijn al vroeg in staat betekenis te geven aan getallen in hun eigen werkelijkheid (zie afbeelding 5).



Meer voorbeelden van zulke onderzoeksactiviteiten zijn te vinden op de site van PARWO. Vooral bij de PARWO-SSOT-ervaringen in het S(B)O zijn de Smartieslessen van Karin van Sprang een sprekend voorbeeld van onderzoeksactiviteiten op dit niveau en van de overgang naar de volgende stap.

[http://www.ssot.eu/rw/PARWO-SSOT-ervaringen%20in%20het%20S\(B\)O/](http://www.ssot.eu/rw/PARWO-SSOT-ervaringen%20in%20het%20S(B)O/)

2. Verkenning van inhoud en structuur

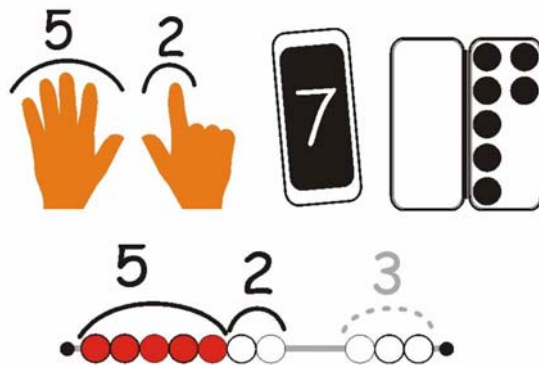
Startend vanuit het uiterlijk en de betekenis van de getallen en hoe en waar je die in je eigen omgeving tegenkomt, wordt de volgende stap gezet: het onderzoek naar de inhoud en de structuur van hoeveelheden. Kinderen onderzoeken hier hun mogelijkheden om structuur aan te

bringen in een ongestructureerde werkelijkheid. In eerste instantie is de ongestructureerde werkelijkheid zelf het onderzoeken waard. De ongeordende hoeveelheid snoepjes, knikkers, kinderen, is lastig te overzien en te tellen. Het zijn er te veel, ze blijven niet op hun plaats en het dwingt je om steeds opnieuw één voor één te tellen, zeker als er iets in de situatie verandert. Deze ervaring is van belang om te ontdekken, dat het een stuk eenvoudiger gaat als je ordening aanbrengt in de voorwerpen die je wilt tellen.



Daarvoor is het soms noodzakelijk om met materialen de concrete werkelijkheid te symboliseren. Denk aan vingers, kralen, fiches, eierdozen, dobbelsteenpatronen. Symboliseren is afstand nemen. Het is het ontdoen van uiterlijkheden en niet relevante eigenschappen. Leerlingen moeten zien, dat het voor het rekenen niet uitmaakt of je 7 eieren, 7 toffees of 7 knikkers hebt. Om dat inzicht te ontwikkelen kan het helpen om een tussenstap in te bouwen. Dat kan bijvoorbeeld door voorwerpen te laten tekenen of te laten vervangen door een fiche of iets dergelijks. Het wordt daarmee een soort abstracte eenheid, die van alles kan voorstellen. Het mooie van zo'n symbolisering is dat je de kracht van bijvoorbeeld de

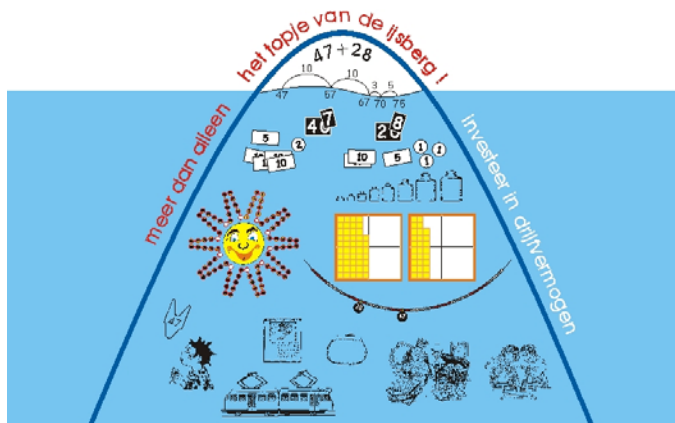
eierdoosstructuur (2 rijen van 5) ook kunt gaan gebruiken voor andere dingen. Het zwarte rondje (zie afbeelding 8) kan immers van alles zijn.



Met modelleren bedoelen we het 'in vorm brengen', het 'omkneden' naar een vorm of structuur, die de essentie van getallen blootlegt en perspectief biedt voor het rekenen. Van de vele structuren die er bestaan bij het rekenen tot 10 en tot 20 zijn uiteraard de 5- en de 10-structuur het meest perspectiefrijk. Wat voor handen en eierdozen geldt, geldt ook voor getallen.

Het symboliseren van de werkelijkheid en het aanbrengen van een zinvolle structuur zijn wezenlijke stappen in een denkproces. In tegenstelling tot wat vaak wordt gedacht is dit proces eigenlijk al vrij abstract. Voor zwakke leerlingen kan het een probleem zijn om te begrijpen wat bijvoorbeeld de vingers van je handen te maken hebben met het aantal gele snoepjes in een doosje Smarties.

Voor de verkenning van de inhoud en de structuur van het getallengebied tot 100 zijn er weer meer en andere mogelijkheden: het kralensnoer, de getallenslang, het zonnespel, het goudbord, allerlei meetinstrumenten, enzovoorts. Ze geven kinderen de gelegenheid de inhoud en de structuur van het getallengebied tot 100 te onderzoeken. Dat wordt weergegeven in onderstaande ijsberg.



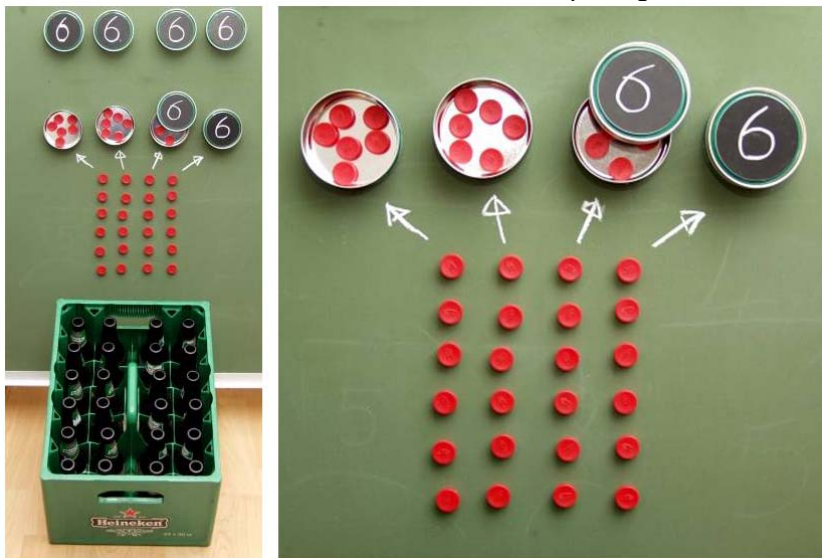
In deze fase van het leerproces doen kinderen wezenlijke ontdekkingen wat betreft wiskundige eigenschappen en patronen. Hier ervaren kinderen AHA-momenten. De wiskundige essentie van structuren, patronen en regelmaat kan in deze fase van het leerproces door kinderen aan den lijve worden ervaren. De kunst van een goede didactiek is de

juiste timing te vinden voor het moment waarop kinderen toe zijn aan bepaalde ontdekkingen en kinderen met het juiste didactische gereedschap op weg te helpen.



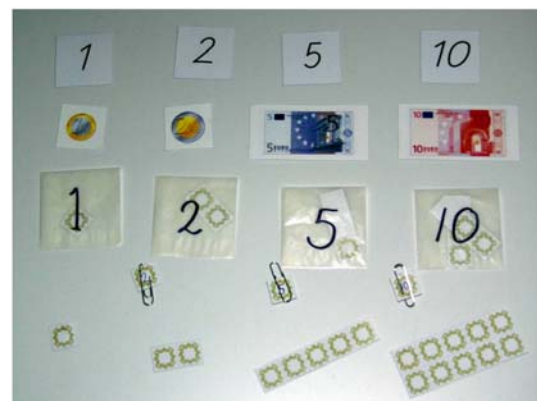
3. Werken met getalrelaties

De meest basale manier om een aantal te bepalen is één voor één tellen. Naarmate kinderen in de voorafgaande fase ervaringen hebben opgedaan met aantallen en structuren, leren ze hun manier van tellen te verkorten. Ze herkennen bepaalde getalbeelden in één oogopslag: een volle hand wordt direct herkend als 5. Ook samenstellingen van verschillende getalbeelden worden direct gezien: 7 als 5 en 2. Er ontstaan grotere getallen-bouwstenen en er ontwikkelt zich een gevoel voor relaties tussen deze bouwstenen. Op den duur heeft een kind de echte vingers, kralen of stippen niet meer nodig. Het weet dat 7 eruit ziet als 5 en 2 en dat 8 op 2 na 10 is. Op dit niveau is het abstractieproces al zo ver gevorderd, dat concrete hoeveelheden niet meer één voor één telbaar aanwezig hoeven te zijn. Kinderen kunnen hier hoeveelheden en getallen zien als een samenstelling van andere getallen. Als het nu gaat over 8 eieren, knikkers of appels, dan kan 8 worden gezien als een groepje van 5 en een groepje van 3, of als 2 minder dan 10 of als 2 groepjes van 4, maar zo nodig ook als 1 meer dan 7 of 1 minder dan 9. Dat wil nog niet zeggen, dat kinderen in deze fase geen materiële ondersteuning meer nodig zouden hebben. Integendeel. Met name de overgang van de tweede naar de derde fase vraagt om een zorgvuldige afbouw van controleerbare (telbare) representaties van getallen naar 'kale' getallen. Afbeelding 11 zou de indruk kunnen wekken, dat dit in één stap te leren is, maar elke overgang vraagt om gevarieerd oefenen en vooral om het opbouwen van zelfvertrouwen bij de kinderen om ook zonder de controle van het concrete beeld op de getallen te kunnen rekenen.



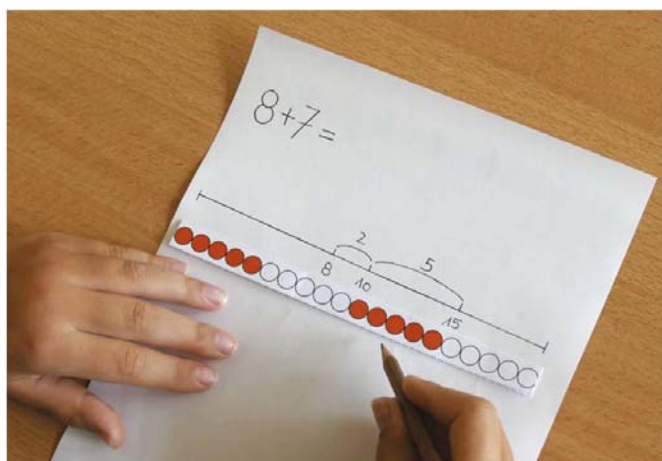
Kinderen moeten hier leren, om te durven vertrouwen op hun nieuw verworven kennis om zonder tellen, zonder controle te kunnen werken met getallen. Materialen als Magbox, Structin, magneetplaatjes, de (lege) getallenlijn kunnen hier ingezet worden als ondersteuning. Het dekseltje van de Magbox kan er nog wel even af om te controleren, maar heb je dat nog elke keer nodig?

Geld kan in deze fase als een belangrijke bruggenbouwer worden ingezet. Enerzijds om betekenis te geven aan het werken met getallen: met geld kun je immers van alles kopen. Anderzijds omdat de structuur van het stelsel van muntwaarden (1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 enz.) ook de bouwstenen representeren voor het werken met 'kale' getallen.



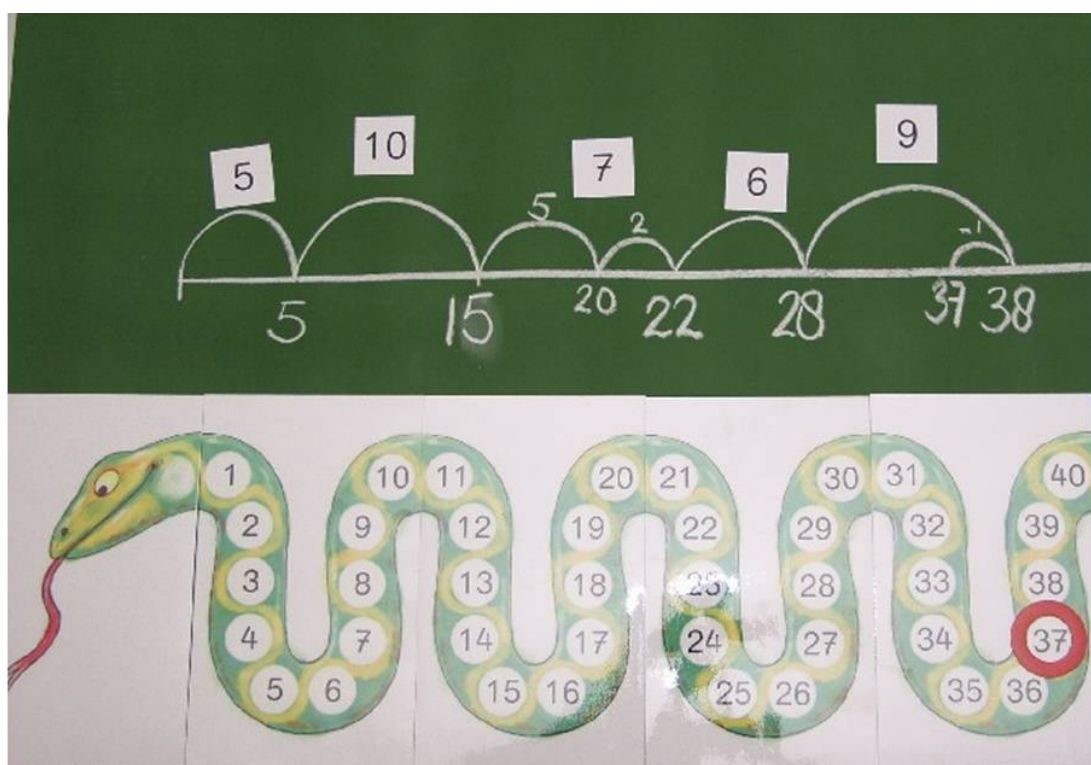
Met gepast betalen, teruggeven en wisselen krijgen de bouwstenen een praktische betekenis. Ook maten en gewichten kunnen als zodanig gebruikt worden om getallen op 'bouwsteenniveau' te leren hanteren. Het bouwsteenniveau is een semi-formeel niveau. Getallen zijn dragers van de inhoud geworden. In die zin is het formeel. Maar er komen nog geen sommen aan te pas. De basis wordt gelegd voor handige rekenstrategieën door het 'stoeien' met bouwstenen door aanvullen, weghalen, splitsen en samenvoegen van structuren en patronen.

Uitgebreid oefenen is hier van grote betekenis. Dat oefenen dient dan wel gepaard te gaan met geregelde reflecties en onderlinge uitwisseling van verschillende varianten waarin 'bouwstenen' worden gebruikt.



Een belangrijk onderdeel in deze fase vormt het ontwikkelen van notatievormen. Rekenbewerkingen worden op een steeds formeler niveau beschreven. Er worden notatievormen gezocht, zoals de getallenlijn, waarop de rekenhandelingen nog concreet zichtbaar zijn met sprongen en pijlen, maar waar verder alleen getallen worden gebruikt. Een mooi voorbeeld daarvan vinden we in het leertraject over de

getallenslang. Zie: <http://www.edumat.nl/007-214-ontwerp-in-de-spotlight/>



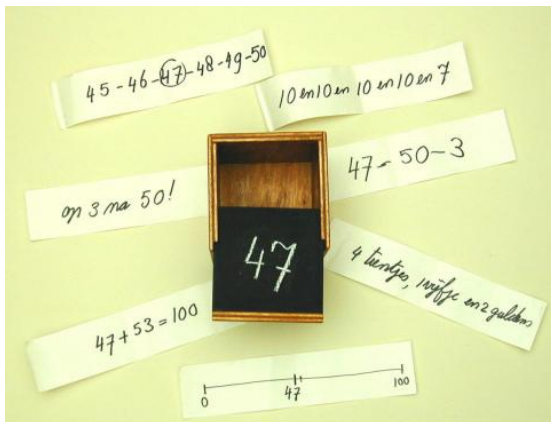
Uiteindelijk worden rekenbewerkingen weergegeven in formules, waarin ook de bewerkingen alleen nog met symbolen worden uitgebeeld. Daarmee zijn we in de vierde en laatste fase beland.

4. Formele opgaven

We noemen de eerste drie niveaus het drijfvermogen. Kinderen hebben hier alles geleerd over getallen en bewerkingen, behalve er op formeel niveau mee opereren. Het niveau van de formele opgaven noemen we het topje van de ijsberg. In deze fase vindt het automatiseren en zo nodig (rekenen tot 20, tafels en deeltafels) ook het memoriseren plaats.



Bij het proces van automatiseren kunnen kinderen blijven terugvallen op hun kennis van de 'bouwstenen' van getallen. Deze kennis vormt als het ware de gereedschapskist waarmee kinderen formele bewerkingen met getallen te lijf kunnen gaan. Wat er in de doosjes van 47 en 28 verborgen kan zitten is nu niet meer elke keer van belang. Het kan van alles zijn: koekjes, auto's, stoelen, huizen, kinderen, elke denkbare hoeveelheid kan in een getal 'gevangen' worden. Met de kennis van de bouwstenen kunnen de kinderen verschillende bewerkingen met de getallen uitvoeren.



Of de bewerking 'optellen' uit de gereedschapskist moet komen of de bewerking 'aftrekken' er zijn genoeg passende hulpmiddelen te vinden om een bruikbare aanpak te vinden. Samen met andere kinderen wordt gezocht naar wat het handigst of het snelst werkt. Zo nodig grijpen we terug op uitgebreidere beschrijvingen van het denkproces, maar in deze fase gaat het vooral om verkorten en versnellen. Oefenen was in de traditionele didactiek vooral gericht op het topje van de ijsberg. Het onderscheiden van de gelaagdheid in de ijsberg maakt zichtbaar, dat oefenen ook eerdere fasen van het leerproces noodzakelijk is. In het PARWO-project worden daar rijke leeromgevingen voor ontworpen en passende didactische materialen bij ontwikkeld.

1. Boswinkel, N. en Moerlands, F.J. (2003) – 'Het topje van de ijsberg.' In: K. Groenwegen (red.), *Nationale rekendagen 2002, een praktische terugblik*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
2. Zie www.gecijferdheid.nl